DRÁSTICA DISMINUCIÓN EN LOS REQUERIMIENTOS DE MEMORIA DEL MÉTODO DE LAS ORDENADAS DISCRETAS

Alejo*, Sánchez A. y Pablo, Guillén
Escuela de Ingeniería Mecánica
Universidad de Los Andes
Mérida, 5101, Mérida
Venezuela
***asanchez@ing.ula.ve**

RESUMEN

En los últimos siete u ocho años, el método de las ordenadas discretas (MOD) se ha convertido en el método más popular –casi standard– para resolver la ecuación de intercambio radiante en problemas de ingeniería. Esto es sorprendente si se considera que hace solo diez años el MOD era prácticamente desconocido para la comunidad de ingenieros y resulta un indicativo de las muchas ventajas del método. Sin embargo, el MOD no está exento de inconvenientes y limitaciones.

Entre los problemas más conocidos del método cabe destacar: efectos de discretización angular (ray effects), alta demanda de memoria de computador, gran consumo de tiempo de cómputo (CPU) para obtener la solución de problemas en medios ópticamente densos y, de máxima importancia para ingenieros, dificultad para ser aplicado a geometrías complejas. Todos estos inconvenientes han sido o están siendo materia de investigación continua en procura de soluciones, y en todos ellos, excepto en el efecto de discretización angular, ha habido un avance significativo en los últimos seis años.

En este trabajo se estudia el problema planteado por los requisitos de memoria asociados con la implementación tradicional del MOD y se plantean alternativas de programación que permiten reducir esos requerimientos en más de un 80%.

INTRODUCCIÓN

El Método de las Ordenadas Discretas –MOD– (Carlson, 1953) es, fundamentalmente, un método de flujos generalizado que permite seleccionar una serie de direcciones discretas sobre las cuales resolver la Ecuación de Intercambio Radiante (EIR) a fin de obtener un campo discreto de intensidades que aproxime al máximo a su equivalente continuo.

El MOD posee grandes ventajas entre las que cabe destacar: la formulación matemática es clara y fácil de visualizar físicamente, ha sido ampliamente probado en diferentes situaciones mostrando repetidamente su aplicabilidad a situaciones reales, provee respuestas al campo de intensidades y al campo de flujos, y no requiere para su aplicación un conocimiento excesivamente profundo del problema físico a resolver. Por estas y otras ventajas, el MOD se ha convertido, prácticamente, en el método estándar para resolver problemas de ingeniería en los cuales el efecto radiante debe ser considerado.

El MOD, por otro lado, no está exento de inconvenientes y limitaciones entre los que merece la pena destacar: efectos de discretización angular (ray effects), alta demanda de memoria de computador, gran consumo de tiempo de cómputo (CPU) para obtener la solución de problemas en medios ópticamente densos y, de máxima importancia para ingenieros, dificultad para ser aplicado a geometrías complejas.

Distintos investigadores han realizado numerosos esfuerzos para eliminar las limitaciones o mitigar los inconvenientes antes mencionados. Una revisión más detallada sobre estos esfuerzos puede ser encontrada en Lee et al. (1993), Cheong y Song (1995), Koch et al. (1995) y Haferman (1995).

En este trabajo, nuestra atención se centra en el grave problema planteado por la gran demanda de memoria que se presenta al aplicar el MOD a problemas complejos. Se explica, en primer lugar, el origen de esta demanda de memoria y se plantea, a continuación, un procedimiento para lograr disminuir la memoria requerida por el método en más de un 80 %.

LA ALTA DEMANDA DE MEMORIA DEL MOD

En una implementación clásica del MOD (Sánchez et al., 1994) en un problema tridimensional con dispersión anisotrópica, empleando una malla de MxNxP elementos y utilizando K direcciones discretas de propagación de radiación, el computador debe almacenar seis arreglos de:

$$K \times M \times N \times P \quad (1)$$

elementos. Tres de estos arreglos son utilizados para almacenar las intensidades en las caras de los volúmenes de control (I_h, I_v y I_f), uno para almacenar las intensidades promedios dentro de cada volumen de control (I_p), otro para almacenar las contribuciones por dispersión y otras fuentes de energía radiante (S) y, finalmente, un arreglo para comprobar convergencia. Por lo tanto, en un ejemplo modesto en el cual se consideren 50x50x50 elementos de malla y 48 direcciones de discretización (S-6), el computador deberá utilizar 36 Mb de memoria solo para guardar estos valores. Si el mallado se incrementa a 100x100x100 elementos, la capacidad necesaria de memoria se incrementa a 288 Mb.

Los autores de este trabajo han logrado reducir drásticamente los requerimientos de memoria del MOD. Esta reducción ha sido posible gracias a las técnicas de programación descritas a continuación.

ELIMINACIÓN DEL ARREGLO UTILIZADO PARA VERIFICAR CONVERGENCIA

Tradicionalmente, las intensidades promedios en cada dirección y para cada volumen de control (I_p) son almacenadas en un arreglo "NUEVO" con las dimensiones indicadas en la Ec. (1) y las mismas intensidades, pero de la iteración anterior, han sido previamente almacenadas en un arreglo "VIEJO" también de las mismas dimensiones. La convergencia es alcanzada cuando:

$$\sum_{1}^{total} \left| \frac{NUEVO - VIEJO}{NUEVO} \right| < EPS \quad (2)$$

donde EPS es un épsilon usado como criterio de convergencia y la sumatoria se realiza sobre el "total" de elementos de los arreglos (KxMxNxP).

Haferman (1995) ha indicado que "si se utiliza una técnica de convergencia que no requiera de las intensidades de la iteración previa" uno de los arreglos (el llamado VIEJO) puede ser eliminado y menciona, además, que en Roberti et al. (1993) se utilizó esta idea. Sin embargo, Haferman (1995) no describe la "técnica" utilizada.

Los autores de este trabajo han empleado, con excelentes resultados un sencillo procedimiento consistente en inicializar un registro temporal TEMP1 a cero y otro registro TEMP2 al valor:

$$TEMP2 = K \times M \times N \times P \quad (3)$$

Posteriormente, y antes de actualizar el valor de cada intensidad promedio en un volumen de control (un elemento de NUEVO) se realiza la operación:

$$TEMP1 = TEMP1 + \frac{Ivieja}{Inueva} \quad (4)$$

donde I denota intensidad y "vieja" y "nueva" indican "de la iteración previa" y "de la actual", respectivamente.

Finalmente, y una vez calculadas todas las nuevas intensidades, el criterio de convergencia consiste en verificar que:

$$|TEMP2 - TEMP1| < EPS \quad (5)$$

Con el procedimiento descrito, el número de arreglos con las dimensiones de la Ec. (1) queda reducido a cinco.

ELIMINANDO LOS ARREGLOS UTILIZADOS PARA GUARDAR LAS INTENSIDADES QUE ACTUAN SOBRE LAS FRONTERAS DE LOS VOLÚMENES DE CONTROL

La Ecuación de Intercambio Radiante (EIR) es una ecuación diferencial de primer orden de tipo hiperbólico. Esto hace que su solución deba realizarse mediante un procedimiento iterativo de "marcha" en los ocho octantes en que se divide el hemisferio de posibles direcciones. Realizando una "marcha" por cada dirección discreta. Así las cosas, sobre cada una de las seis caras de cada volumen de control se generan K intensidades (número de direcciones discretas) que tradicionalmente se almacenan de la siguiente manera: las intensidades de las caras izquierda (I_{vi}) y derecha (I_{vd}) son almacenadas en un arreglo I_v; las intensidades de la cara norte (I_{hn}) y sur (I_{hs}) son almacenadas en un arreglo I_h; y, finalmente, las intensidades de las caras frontal (I_{ff}) y posterior (I_{fp}) son almacenadas en un arreglo I_f. Adicionalmente, las intensidades de las diferentes caras están relacionadas con la intensidad promedio del volumen de control (I_p) mediante la interpolación:

$$\begin{aligned} I_p &= \alpha I_{vx} + (1-\alpha) I_{vr} \\ I_p &= \alpha I_{hy} + (1-\alpha) I_{hr} \\ I_p &= \alpha I_{fz} + (1-\alpha) I_{fr} \end{aligned} \quad (6)$$

donde: α es el factor de interpolación ($0.5<\alpha<1.0$) ; I_{vr}, I_{hr} y I_{fr} son las intensidades de referencia (conocidas) sobre los planos (o caras) verticales, horizontales y frontales, respectivamente; y I_{vx}, I_{hy} y I_{fz} son las intensidades buscadas (incógnitas) sobre los planos (o caras) verticales, horizontales y frontales, respectivamente.

Haferman (1995) ha indicado que si se utiliza α=1.0 la Ec. (6) se reduce a:

$$I_p = I_{vx} = I_{hy} = I_{fz} \quad (7)$$

y por lo tanto los cuatro arreglos (I_p, I_v, I_h e I_f) pueden ser reducidos a uno. En Roberti et al. (1993) se utilizó esta idea.

La situación descrita por Haferman (1995), si bien es interesante por apuntar en la dirección correcta, no resulta suficiente ya que, teóricamente, el valor de α debería ser 0.5

(Byun et al., 1997) y solo cuando se obtengan resultados de intensidades inaceptables (intensidades negativas) debe este parámetro incrementar su valor (Sánchez y Smith, 1992), alcanzando el límite superior de α=1.0 solo en situaciones extremas (Sánchez et al., 1992). Debe por lo tanto encontrarse una manera más general de eliminar los arreglos en los que se almacenan las intensidades actuantes sobre las caras de los volúmenes de control

Existen dos razones fundamentales para almacenar estas intensidades: una razón es la de poder realizar el procedimiento de "marcha" utilizando la Ec. (6) con intensidades de referencia conocidas (esto es "almacenadas") y la otra es la de poder calcular (una vez concluido el proceso iterativo) los flujos de calor y las irradiaciones que se requieran. Sin embargo, la segunda razón dada no es limitante por cuanto, tal como se señaló por primera vez en Sánchez et al. (1992) al aplicar el MOD a temas de percepción remota, "una vez conocidas las intensidades promedio en los volúmenes de control (I_p) el campo de intensidades está totalmente definido y, por ende, cualquier intensidad deseada en una dirección dada, puede ser recuperada a partir de las intensidades I_p". O, en otras palabras, si conocemos I_p en todo el dominio, podemos recalcular, cuando así lo deseemos, las intensidades sobre las caras para lo cual podremos utilizar un archivo temporal y, por lo tanto, evitar el almacenamiento de estas intensidades para efectos de cálculos de flujo de calor o irradiaciones.

En cuanto a la necesidad de almacenar las intensidades actuantes sobre las caras de los volúmenes de control para poder realizar el procedimiento de marcha, los autores de este trabajo encontraron que una programación cuidadosa del modelo computacional –descrita a continuación– elimina, casi totalmente, esta necesidad.

En una implementación tradicional del MOD las intensidades promedio en cada volumen de control (I_p) y para cada octante, son evaluadas mediante un algoritmo como el smostrado en la Fig. 1.

DO 1 id = 1, K/8
DO 2 ix = 1, M
DO 3 iy = 1, N
DO 4 iz = 1, P

$$I_p^{id} = \frac{A\,I_{vr}^{id} + B\,I_{hr}^{id} + C\,I_{fr}^{id} + \alpha S_{id}}{(A+B+C)+\alpha\beta}$$

$$I_{vx} = \frac{I_p - (1-\alpha)I_{vr}}{\alpha}$$

$$I_{hy} = \frac{I_p - (1-\alpha)I_{hr}}{\alpha}$$

$$I_{fz} = \frac{I_p - (1-\alpha)I_{fr}}{\alpha}$$

4 CONTINUE
3 CONTINUE
2 CONTINUE
1 CONTINUE

Figura 1. Algoritmo tradicional

en el cual A, B y C dependen de la dirección discreta (id) considerada, I_p, I_v, I_h y I_f son, como ya se mencionó, arreglos con dimensiones como las descritas en la Ec. (1), el subíndice r indica "referencia", los subíndices x, y ó z indican "incógnita", S_{id} depende solo de I_p y β es una propiedad del medio. Debe notarse que en esta implementación clásica, el programador debe llevar un control de los índices de los arreglos de tal manera que una intensidad "incógnita", calculada en un volumen de control dado, pasa a ser una intensidad de referencia para el volumen de control contiguo (Fiveland, 1988 y Sánchez et al., 1992).

Alternativamente, consideremos el algoritmo presentado en la Fig. 2.

DO 1 id = 1, K/8
DO 2 ix = 1, M
Si ix = 1 $\Rightarrow I_{vr}^{id}$ = condición de frontera
Si ix ≠ 1 $\Rightarrow I_{vr}^{id} = I_{vx}$
DO 3 iy = 1, N
Si iy = 1 $\Rightarrow I_{hr}^{id}$ = condición de frontera
Si iy ≠ 1 $\Rightarrow I_{hr}^{id} = I_{hy}$
DO 4 iz = 1, P
Si iy = 1 $\Rightarrow I_{fr}^{id}$ = condición de frontera
Si iz ≠ 1 $\Rightarrow I_{fr}^{id} = I_{fz}$

$$I_p^{id} = \frac{A\,I_{vr}^{id} + B\,I_{hr}^{id} + C\,I_{fr}^{id} + \alpha S_{id}}{(A+B+C)+\alpha\beta}$$

$$I_{vx} = \frac{I_p - (1-\alpha)I_{vr}}{\alpha}$$

$$I_{hy} = \frac{I_p - (1-\alpha)I_{hr}}{\alpha}$$

$$I_{fz} = \frac{I_p - (1-\alpha)I_{fr}}{\alpha}$$

4 CONTINUE
3 CONTINUE
2 CONTINUE
1 CONTINUE

Figura 2. Algoritmo propuesto

en este caso, en lugar de cuatro (4) arreglos para intensidades con dimensiones como las de la Ec. (1) se tiene uno solo (I_p). Además, se tendrán seis (6) arreglos para almacenar las condiciones de frontera:

$$\begin{array}{ll} \text{dos de } \frac{K}{2} \times M \times N & \text{elementos} \\ \text{dos de } \frac{K}{2} \times M \times P & \text{elementos} \\ \text{dos de } \frac{K}{2} \times N \times P & \text{elementos} \end{array} \qquad (8)$$

También harán falta dos (2) arreglos para almacenar I_v y I_h de dimensiones como las indicadas en la Ec. (9). I_f, por otro lado, no requiere de ningún almacenamiento.

N x P elementos para I_v
P elementos para I_h (9)

Debe notarse que la técnica descrita, en contraste con la de Haferman (1995) es independiente de α y puede, por lo tanto, ser aplicada en todos los casos sin perjudicar la exactitud del modelo.

CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado varias técnicas para disminuir la alta demanda de memoria que tradicionalmente presenta el MOD.

Las técnicas presentadas pueden y deberían ser aplicadas en todas las implementaciones del MOD por cuanto reducen, drásticamente, los requisitos de memoria.

A modo ilustrativo, vale la pena repasar el ejemplo dado al inicio de este trabajo: un problema tridimensional resuelto en un mallado de 50 x 50 x 50 elementos y con 48 direcciones discretas requeriría 36 Mb de memoria usando el método tradicional, en tanto que con el método aquí descrito requerirían menos de 6.5 Mb. Si el mallado se incrementa a 100 x 100 x 100 elementos, entonces el método tradicional requeriría 288 Mb en tanto que el propuesto solo necesita 49.5 Mb.

Claramente, las técnicas propuestas en este trabajo reducen el orden de magnitud de los requerimientos de memoria del MOD, de seis (6) arreglos con dimensiones como las de la Ec. (1) a solo un (1) arreglo con esas dimensiones. Esto significa que el ahorro de memoria es, siempre, superior al 80 %.

REFERENCIAS

Byun, K. H., Smith, T. F., y Sánchez, A., 1997, "View Factors of a Rectangular System Enclosing a Transparent Media by Discrete-Ordinates Method," Aceptado para publicación en KSME Journal, The Korean Society of Mechanical Engineers, Corea.

Carlson, B. G., 1953, Solution of the Transport Equation by Sn Approximations, Report LA-1599, Los Alamos Scientific Laboratory.

Cheong, K.B. y Song, T. H., 1995, "Application of the Second Order Discrete Ordinates Method to a Radiation Prolem in a Square Geometry," Memorias del International Symposium on Radiative Heat Transfer, Kushadashi, Turquía, pp. 75-91

Fiveland, W. A., 1988, "Three-Dimensional Radiative Heat Transfer Solutions by the Discrete-Ordinates Method," J. Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 2, No. 4, pp. 309-316

Haferman, J. L., 1995, A Polarized Multi-Dimensional Discrete-Ordinates Radiative Transfer Model for Remote Sensing Applications, Ph.D. Tesis, The University of Iowa, U.S.A.

Koch, R., Krebs, W., Witting, S. y Viskanta, R., 1995, "A Parabolic Formulation of the Discrete Ordinates Method for the Treatment of Complex Geometries," Memorias del International Symposium on Radiative Heat Transfer, Kushadashi, Turquía, pp. 43-61

Lee, H. O. S., Chai, J. C. y Patankar, S. V., 1993, "Recent Developments in the Solution of Radiation Heat Transfer Using the Discrete Ordinates Method," Memorias del 6th International Symposium on Transport Phenomena in Thermal Engineering, Seoul, Korea, pp. 293-298

Roberti, L., Haferman, J. y Kummerow, C., 1993, "Microwave Radiative Transfer through Horizontally Inhomogeneous Precipitating Clouds," Aceptado para publicación en J. Geophys. Res.

Sánchez, A., Krajewski, W. F., y Smith, T. F., 1992, A General Purpose Radiative Transfer Model for Application to Remote Sensing in Multi-Dimensional Systems, IIHR Report No. 355, Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa City, Iowa.

Sánchez, A. y Smith, T. F., 1992, "Surface Radiation Exchange for Two-Dimensional Rectangular Enclosures Using the Discrete-Ordinates Method," J Heat Transfer., Vol. 114, pp. 465-472

Sánchez, A., Smith, T. F., y Krajewski, W., 1994, "Three-Dimensional Atmospheric Radiation Model Based on the Discrete-Ordinates Method," Journal of Atmospheric Research, Vol.33, pp. 283-308