

SOLUCION DE LA ECUACION DE TRANSFERENCIA RADIANTE EN MEDIO PARTICIPANTE HACIENDO USO DE COMPUTACION PARALELA EN UN COMPUTADOR ORIGIN 2000

Guillén, P., Sánchez, A., Torres, C.
Grupo de Ciencias Térmicas Computacionales (CTC)
Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela

RESUMEN

En este trabajo un modelo numérico basado en el Método de las Ordenadas Discretas (MOD) es utilizado para resolver la Ecuación de Transferencia Radiante (ETR) en coordenadas cilíndricas en un medio participante. El modelo es paralelizado haciendo uso de la librería de pases de mensajes, Message Passing Interface, (MPI), en un computador de memoria Compartida-Distribuida Origin 2000 de 4 procesadores. La influencia de los coeficientes de absorción y dispersión sobre la aceleración y la eficiencia del esquema de paralelización es investigada y, en todos los casos, los resultados son presentados en forma de gráficos para mostrar tiempos de CPU y aceleración.

INTRODUCCION

Existen numerosas aplicaciones en problemas de ingeniería donde el Intercambio de Energía Radiante se encuentra presente, desde el diseño de cámaras de combustión hasta la percepción remota desde satélites (Sánchez, Krajewski y Smith 1992). En todas estas aplicaciones, la Ecuación de Transferencia Radiante, (ETR), ha de ser resuelta. Debido a sus muchas ventajas, el Método de las Ordenadas Discretas, (MOD), se ha convertido en el procedimiento más utilizado para resolver la Ecuación de Transferencia Radiante, (ETR).

El desarrollo de arquitecturas paralelas ha llevado a la comunidad científica que investiga el fenómeno de Intercambio de Energía Radiante a desarrollar algoritmos paralelos del Método de las Ordenadas Discretas, (MOD), (Haghighat 1991, Gonçalves y Coelho 1997). En este trabajo se implementa un algoritmo paralelo basado en el conjunto de cuadraturas, es decir, el número de direcciones a ser resueltas, y diseñado para minimizar la interdependencia entre las direcciones encontradas en los modelos seriales en coordenadas cilíndricas. Este algoritmo paralelo está basado en un código serial que resuelve la Ecuación de Transferencia Radiante, (ETR), a través de un conjunto de direcciones independientes (Sánchez 1997). Las direcciones son distribuidas en grupos de manera que al ser asignadas a los procesadores cada uno de éstos posee una carga equivalente de cálculo. El código serial es paralelizado usando un modelo de programación de pases de mensajes usando la librería Message Passing Interface, (MPI), como la interfaz (Gropp, Lusk y Skjellum 1996), en un computador de memoria Compartida-Distribuida Origin 2000. La influencia de variables tales como el número de procesadores, el orden de la cuadratura y los coeficientes de absorción y dispersión es estudiada para un problema modelo.

El conjunto de herramientas computacionales (Hardware & Software) utilizados en este estudio pertenecen al Centro Nacional de Cálculo Científico de la Universidad de Los Andes, CeCalCULA. A continuación una breve descripción de la formulación y solución del problema es presentada seguida por los resultados numéricos.

FORMULACION DEL PROBLEMA

El método de las Ordenadas Discretas permite la solución numérica de la Ecuación de Transferencia Radiante, (ETR), para un número de direcciones discretas. Esta ecuación en un medio que dispersa, emite y absorbe en cualquier dirección puede ser escrita (Carlson y Lathrop 1968):

$$\frac{\partial I_{\lambda}(s, \Omega)}{\partial s} + [k(s) + \sigma(s)] I_{\lambda}(s, \Omega) = k(s) I_{\lambda b}[\bar{T}(s)] + \frac{\sigma(s)}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I_{\lambda}(s, \Omega') \Phi(\Omega', \Omega) d\Omega' \quad (1)$$

el subíndice λ indica la dependencia de la intensidad radiante con la longitud de onda. $\frac{\partial I_{\lambda}(s, \Omega)}{\partial s}$ variación de la intensidad monocromática, $k(s) I_{\lambda b}[\bar{T}(s)]$ energía emitida por el medio debido a su temperatura, $k(s)$ es el coeficiente de absorción y $I_{\lambda b}[\bar{T}(s)]$ es la función de Planck. $\frac{\sigma(s)}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I_{\lambda}(s, \Omega') \Phi(\Omega', \Omega) d\Omega'$ es el aumento de la intensidad debido a la dispersión de la energía radiante que ingresa en la dirección de interés $\bar{\Omega}$, $\sigma(s)$ es el coeficiente de dispersión, $\Phi(\Omega', \Omega)$ la función de fase de la dispersión y $[k(s) + \sigma(s)] I_{\lambda}(s, \Omega)$ es la atenuación de la intensidad a través de ds debido a la absorción y a las características de dispersión hacia afuera del medio, s representa la dirección de propagación de I .

La Ecuación (1) está sujeta (para superficies difusas) a las siguientes condiciones de frontera:

$$I^+(s, \Omega) = \epsilon I_b^+ + \frac{\Psi}{\pi} \int_0^{2\pi} I^-(s, \Omega') \omega d\Omega' \quad (2)$$

donde los índices +, y - indican radiación desde la frontera hacia el medio, y desde el medio hacia la frontera respectivamente. ω representa el coseno del ángulo entre la dirección de propagación de I_{λ} y la normal a la frontera dada. La reflectividad y la emisividad son denotadas por Ψ y ϵ respectivamente.

La discretización de la Ec. (1), la selección de una cuadratura apropiada y el modelaje de la función fase para problemas bi-dimensionales en geometrías axisimétricas está ampliamente descrito en la literatura, (Jendoubi 1991), (Jendoubi y Lee 1992), (Lathrop 1969).

EL METODO DE LAS ORDENADAS DISCRETAS EN COORDENADAS CILINDRICAS

La Ecuación de Transferencia Radiante, (ETR), es resuelta para un conjunto de $\frac{N(N+2)}{8}$ direcciones, para $N = 2, 4, 6, \dots$

donde N es el término comúnmente usado para referirse al método (S-N) de ordenadas discretas. Estas direcciones aproximan las integrales usando una regla de cuadratura numérica, una cuadratura de niveles simétricos es usado en este trabajo (Sánchez, Smith y Krajewski 1994). Implementando diferencias finitas a las derivadas espaciales en la Ec. (1), la ecuación discretizada de transferencia para una dirección m y para un volumen de control dado es:

$$I_{p,m} = \frac{|\mu_m| A I_{\gamma,m} + |\xi_m| B I_{\gamma,m} + \alpha I_{\gamma,m-\frac{1}{2}} + \beta S_m V}{D} \quad (3)$$

donde μ y ξ son los cosenos directores de la dirección m ; los subíndices p y γ denotan promedio y referencia, (conocida), respectivamente; A, B, α, V y D son constantes que pueden ser determinadas para cada volumen de control y dirección involucrada (Jendoubi 1991); y S_m está dada por:

$$S_m = (1-w) I_b(T_p) + \frac{w}{4\pi} \sum_{m'=1}^M I_{p,m'} \Phi_{m',m} W_{m'} \quad (4)$$

Una vez que la intensidad promedio $I_{p,m}$ ha sido determinada, las intensidades finales, (desconocidas), pueden ser evaluadas mediante:

$$aa I_{f,m} + (1-aa) I_{\gamma,m} = I_{p,m} \quad (5.a)$$

$$bb I_{f,m} + (1-bb) I_{\gamma,m} = I_{p,m} \quad (5.b)$$

$$cc I_{f,m+\frac{1}{2}} + (1-cc) I_{\gamma,m-\frac{1}{2}} = I_{p,m} \quad (5.c)$$

donde aa, bb y cc son valores determinados para cada volumen de control y dirección involucrada de una manera tal que valores positivos de la intensidad radiativa son garantizados en la solución, (Lathrop 1969). Un conjunto de ecuaciones similares a la Ec. (3) es escrito para cubrir las restantes direcciones y usado para construir un código numérico que resuelve para $I_{p,m}$. Las ecuaciones discretizadas involucran $I_{\gamma,m\pm\frac{1}{2}}$, las cuales dependen de la $I_{\gamma,m-\frac{1}{2}}$ inicial para cada nivel ξ . Una escogencia inicial

para $l_{\gamma,m-\frac{1}{2}}$ en cada nivel ξ es colocar ésta igual a la primera $l_{p,m}$ para cada volumen de control. Soluciones iterativas son requeridas ya que $l_{p,m}$ depende de todas las intensidades $l_{p,m'}$ y, además, las condiciones de frontera son actualizadas después de cada iteración. De particular importancia para este trabajo es el hecho de que las Ecuaciones (3) y (5) involucran un procedimiento de marcha (que implica una clara dependencia), en el dominio geométrico y en la cuadratura (que como ya se mencionó en el párrafo anterior también involucra dependencia). Cualquier intento de subdividir el dominio o la cuadratura en bloques a ser resueltos por diferentes procesadores se enfrentará por lo tanto con un pase de mensajes intensivo.

ESQUEMA DE PARALELIZACION

Un algoritmo para resolver la Ecuación de Transferencia Radiante, (ETR), en coordenadas cilíndricas mediante el Método de Las Ordenadas Discretas, (MOD), basado en Grupos Independientes de acuerdo al orden de la cuadratura ha sido diseñado usando un modelo de programación de pase de mensajes y ha sido implementado usando la librería Message Passing Interface, (MPI), como la interfaz de pases de mensajes. La solución de la ETR sigue una marcha a través de los volúmenes de control en el dominio considerado y las intensidades en la frontera son evaluadas para el próximo volumen de control mediante un esquema de diferencias apropiado. Esta técnica representa un procedimiento secuencial inherente el cual no se presta para el procesamiento en paralelo mediante el pase de mensajes. Haciendo uso de la estrategia de paralelización mediante la descomposición en Grupos Independientes para la solución de la ETR con el MOD y la librería de pases de mensajes MPI se logra superar esta limitación (Sánchez, Guillén y Torres 1998). En la Tabla 1 se muestra la descomposición en grupos independientes realizada a las cuadraturas, para diseñar e implementar el algoritmo paralelo.

Las letras que aparecen entre las direcciones en la Tabla 1, son cantidades dependientes de la recurrencia en la solución de la Ecuación de Transferencia Radiante. MG corresponde al número de direcciones por cuadrante para resolver la Ec. (3). Cada grupo indica secuencias imposibles de romper sin enviar mensajes. Por ejemplo, en el grupo I, una vez calculada la dirección 1 se calcula la cantidad A y con este valor se calcula la dirección MG+1. Si esto ocurriese en diferentes procesadores, el procesador que calculó la dirección 1 tendría que enviar esta cantidad A al procesador que va a calcular la dirección MG+1. Esta técnica permite una disminución en tiempo computacional debido a la minimización de la comunicación entre los procesos. La distribución de los diferentes grupos dependiendo del orden de la cuadratura permite, distribuir la carga en forma equilibrada a través de los procesadores. Esto constituye una ventaja poderosa en el área de la computación paralela ya que problemas de balanceo de carga son evitados.

Tabla 1. Descomposición de las direcciones en Grupos Independientes

| | | | | |
|-----|--|------|--|-------------------|
| I | 1, A, MG+1 | VIII | 2*MG+1, AA, 3*MG+1 | MG = 1 S - 2 |
| II | 2, 3, B, MG+2, MG+3 | IX | 2*MG+2, 2*MG+3, BB, 3*MG+2, 3*MG+3 | MG = 3 S - 4 |
| III | 4, 5, 6, C, MG+4, MG+5, MG+6 | X | 2*MG+4, 2*MG+5, 2*MG+6, CC, 3*MG+4, 3*MG+5, 3*MG+6 | MG = 6 S - 6 |
| IV | 7, 8, 9, 10, D, MG+7, MG+8, MG+9, MG+10 | XI | 2*MG+7, 2*MG+8, 2*MG+9, 2*MG+10, DD, 3*MG+7, 3*MG+8, 3*MG+9, 3*MG+10 | MG = 10 S - 8 |
| V | 11,12,13,14,15, E, MG+11, MG+12, MG+13, MG+14, MG+15 | XII | 2*MG+11, 2*MG+12, 2*MG+13, 2*MG+14, 2*MG+15, EE, 3*MG+11, 3*MG+12, 3*MG+13, 3*MG+14, 3*MG+15 | MG = 15 S - 10 |
| VI | 16, 17, 18, 19, 20, 21, F, MG+16, MG+17, MG+18, MG+19, MG+20, MG+21 | XIII | 2*MG+16, 2*MG+17, 2*MG+18, 2*MG+19, 2*MG+20, 2*MG+21, FF, 3*MG+16, 3*MG+17, 3*MG+18, 3*MG+19, 3*MG+20, 3*MG+21 | MG = 21 S - 12 |
| VII | 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, H, MG+22, MG+23, MG+24, MG+25, MG+26, MG+27, MG+28 | XIV | 2*MG+22, 2*MG+23, 2*MG+24, 2*MG+25, 2*MG+26, 2*MG+27, 2*MG+28, HH, 3*MG+22, 3*MG+23, 3*MG+24, 3*MG+25, 3*MG+26, 3*MG+27, 3*MG+28 | MG = 28 S - 14 |

A continuación se describe, a modo de ejemplo, el procedimiento seguido para la asignación de grupos a los procesadores para la cuadratura S-6 (Grupos I, II, III, VIII, IX y X), la asignación para S-14 sigue el mismo procedimiento.

1. El grupo máximo es de 6 componentes. Luego no se debe paralelizar con menos de 6 direcciones por procesador, D/P.
2. Con dos procesadores se tendrán 12 D/P, Ejemplo:
P1 resuelve los grupos I, II y III
P2 resuelve los grupos VIII, IX y X

3. Con tres procesadores se tendrán 8 D/P, Ejemplo:
 P1 resuelve los grupos I y III
 P2 resuelve los grupos II y IX
 P3 resuelve los grupos VIII y X
4. Con cuatro procesadores se tendrán 6 D/P y se alcanza el máximo número de procesadores. Ejemplo:
 P1 resuelve el grupo III
 P2 resuelve el grupo X
 P3 resuelve los grupos I y II
 P4 resuelve los grupos VIII y IX

En todos los ejemplos hemos considerado a P1 como el procesador Maestro. Como fue discutido en la sección anterior, soluciones iterativas son requeridas hasta que se satisfaga un criterio de convergencia. Una vez que los grupos han sido asignados a los procesadores ellos determinan su error relativo y función fuente. Estas dos cantidades son enviadas al procesador maestro quien se encarga; de efectuar la suma de cada uno de los errores provenientes de cada procesador para determinar el error global y así determinar si se satisface el criterio de convergencia y efectuar la suma de las funciones fuente provenientes de cada procesador para determinar la contribución total. Esta función fuente, contribución total, es enviada desde el maestro a cada uno de los procesadores, para la próxima iteración. Cuando el criterio de convergencia se satisface, cada uno de los procesadores envían al maestro las intensidades calculadas para presentar los resultados. Se hace la observación de que el procesador Maestro no realiza así mismo algún tipo de envío ya que el determina su error relativo, función fuente e intensidades de acuerdo al Grupo Independiente de direcciones que le ha sido asignado.

COMPUTADOR ORIGIN 2000

Este es un equipo Silicon Graphics Origin 2000 con 4 procesadores R10000 de 175 MHz, 712 MB RAM y 18.5 GB DD. Este equipo representa la nueva tecnología de memoria Compartida-Distribuida. Este paradigma combina la escalabilidad de la memoria Distribuida con la facilidad de operación de la memoria Compartida.

PROBLEMA PATRON Y RESULTADOS

Para verificar la estrategia de paralelización se ha escogido un problema patrón con las siguientes características, la superficie del cilindro ($r = R$) es negra y caliente, el eje de simetría del cilindro es considerado una frontera especular y las dos tapas del cilindro son negras y frías. El medio participante es gris y frío, absorbe, e isotrópicamente dispersa la energía radiante. Para la geometría del cilindro, $R = 1$ m (radio del cilindro), $2H = 10$ (altura del cilindro) y una razón de forma, (H/r) , de magnitud 5. Un criterio de convergencia de 0.0001 es usado para la solución de la Ecuación de Transferencia Radiante en los resultados presentados. El criterio de convergencia está basado en el cambio porcentual de todas las intensidades en dos iteraciones sucesivas. En todos los resultados a ser presentados, se ha escogido un problema con granularidad gruesa, es decir, que la cantidad de cálculo que debe realizar cada procesador es lo suficientemente grande para apreciar la efectividad de la paralelización. La solución y precisión de la Ecuación de Transferencia Radiante, (ETR), a través de Grupos Independientes, en códigos secuenciales ha sido presentada y comparada con resultados reportados en la literatura, (Guillén, Sánchez y Torres 1998).

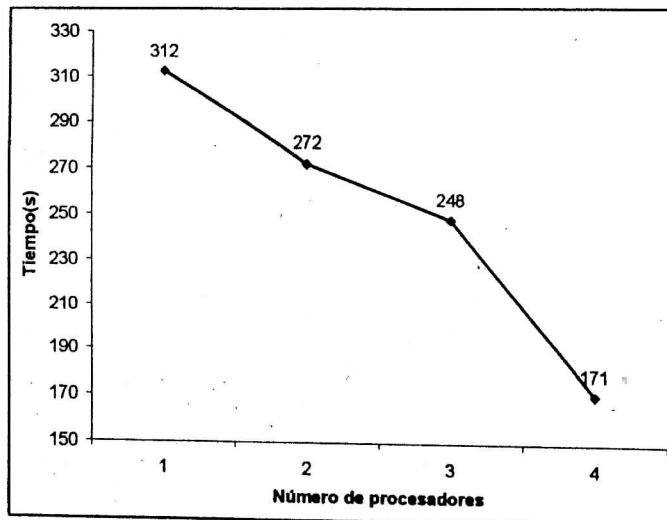


Figura 1. Tiempo con respecto al número de procesadores. Cuadratura S-14, malla 50x50, coeficiente de extinción 1, coeficiente de dispersión 0.7 y coeficiente de absorción 0.3.

En la Figura 1, se muestran los tiempos de CPU obtenidos al considerar el código implementado con MPI para cada uno de los procesadores que componen la Origin 2000, para el problema patrón. Se puede observar que a medida que aumenta el número de procesadores, los tiempos de CPU disminuyen, verificando que la estrategia de paralelización con pases de mensajes a pesar de la interdependencia mencionada confirma, favorablemente, el uso de computación paralela.

En computación paralela se define una fórmula con respecto a la aceleración, que indica que tan bien la paralelización es explotada para una arquitectura paralela o que tan bien un algoritmo particular se ajusta a una arquitectura paralela, en este trabajo se presenta una nueva fórmula redefinida para la aceleración, que nos indica como, a medida que aumenta el número de procesadores, el código paralelo se acelera con respecto al código secuencial. Esta aceleración es calculada como sigue:

$$\text{Aceleración} = \frac{\text{Tiempo}(1 \text{ Procesador}) - \text{Tiempo}(N \text{ Procesadores})}{\text{Tiempo}(1 \text{ Procesador})}$$

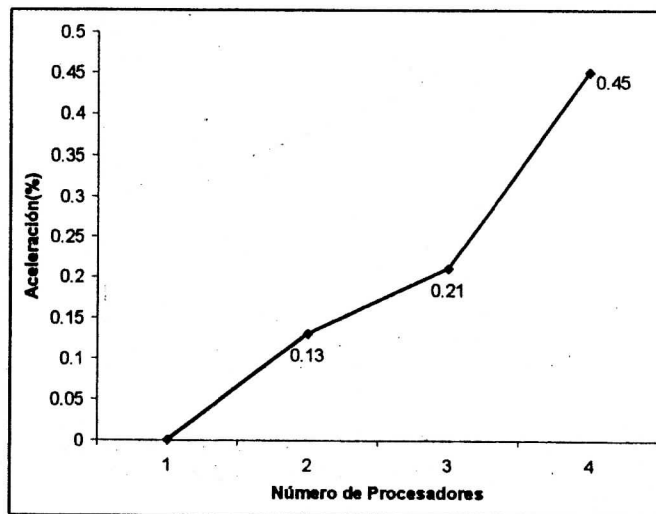


Figura 2. Aceleración. Cuadratura S-14, malla 50x50, coeficiente de extinción 1, coeficiente de dispersión 0.7 y coeficiente de absorción 0.3.

En la Figura 2, se muestran las aceleraciones obtenidas para el problema patrón y cada uno de los procesadores que componen la Origin 2000. Los resultados muestran que con 4 procesadores se alcanza la máxima aceleración 45%, lo cual nos indica que el código paralelo haciendo uso de 4 procesadores se acelera esta cantidad con respecto al código secuencial. Esto último puede interpretarse como, que el código paralelo, haciendo uso de 4 procesadores, consume un 45% del tiempo que consume el código secuencial.

En vista de los resultados obtenidos al hacer uso del código paralelizado con MPI y 4 procesadores, en la Fig. 3 se muestran los tiempos de CPU obtenidos al considerar variaciones del medio participante con extinción igual a la unidad. Como puede observarse, a medida que aumenta el coeficiente de absorción, lo cual implica que el medio participante deja de dispersar, el código paralelo consume menos tiempo verificando de nuevo que con la estrategia de paralelización implementada en este trabajo la aceleración se incrementará considerablemente y, en particular, cuando el coeficiente de absorción sea elevado.

CONCLUSIONES

En este trabajo, un nuevo procedimiento de solución para el Método de las Ordenadas Discretas en coordenadas cilíndricas ha sido presentado. El procedimiento está basado en conjuntos de direcciones independientes a través de Grupos y es de particular importancia para estrategias de paralelización basadas en librerías de pases de mensajes.

La asignación de estos Grupos independientes a los diferentes procesadores que componen la Origin 2000 proporcionó un balanceo de carga entre éstos, lo que evitó problemas de sincronización.

Se determinó para un ejemplo de granularidad gruesa que a medida que aumenta el número de procesadores los tiempos disminuyen y se obtuvo que con 4 procesadores se tiene la mayor aceleración.

Se realizó un estudio con 4 procesadores para determinar la influencia de la aceleración al efectuar variaciones del medio participante, obteniéndose que los tiempos disminuyen al aumentar el coeficiente de absorción.

Se debe mencionar que los resultados obtenidos están fuertemente afectados por la granularidad (cantidad de trabajo hecho por cada procesador) del problema. A medida que la granularidad aumenta la implementación paralela se hace más eficiente.

Finalmente, a pesar de la interdependencia encontrada en los modelos seriales para resolver la Ecuación de Transferencia Radiante, (ETR), en coordenadas cilíndricas mediante el Método de las Ordenadas Discretas, (MOD), se logró implementar un código paralelo haciendo uso de la librería de paralelización Message Passing Interface, (MPI), obteniéndose resultados favorables concernientes al uso de computación paralela.

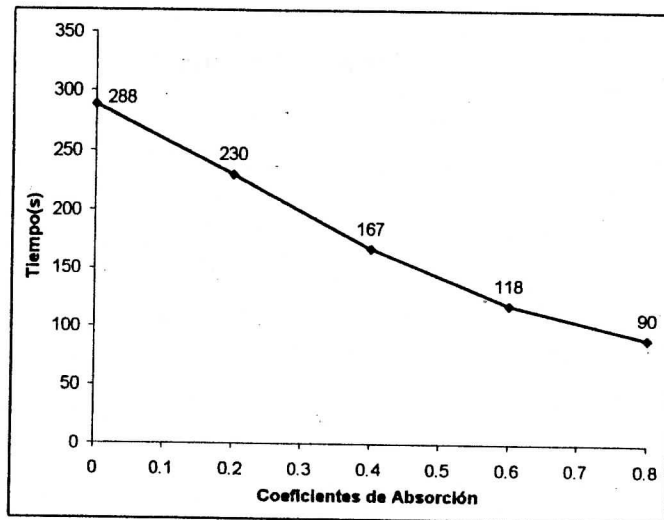


Figura 3. Influencia de la variación de los coeficientes de absorción y dispersión. Número de procesadores 4, Cuadratura S-14, malla 50x50,

REFERENCIAS

- Carlson, B. y Lathrop, K. 1968, "Transport Theory - The Method of Discrete Ordinates," in Computing Methods in Reactor Physics, Edited by Greenspan, H., Kelber, C. N., and Okrent, D., Gordon and Breach, New York, pp. 165-266.
- Goncalves, J. y Coelho, P. 1997, "Parallelization of the Discrete Ordinates Method," Numerical Heat Transfer, Part B, 32:151-173.
- Gropp, W., Lusk, E., y Skjellum, A. 1996, Using MPI. Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface, Scientific and Engineering Computation series, The MIT Press.
- Guillén, P., Sánchez, A., y Torres, C. 1998, Un Algoritmo paralelo para el método de las ordenadas discretas en coordenadas cilíndricas. IV Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIMENICS '98), Memorias del Congreso, TM 87-94, Ciudad Guayana.
- Haghighat, A. 1991, "Angular Parallelization of a curvilinear S-N Transport Theory Method," Nuclear Sci. Eng., Vol 108, pp. 267-277.
- Jendoubi, S. 1991, "Radiative Transfer Solutions for Cylindrical Coordinates with Emitting, Absorbing, and Anisotropic Scattering Medium," M. S. Thesis, University of Minnesota.
- Jendoubi, S. y Lee, H. 1992, "Radiative Transfer Solutions for Cylindrical Coordinates with Emitting, Absorbing, and Anisotropic Scattering Medium," Paper AIAA-92-0123, Journal of Thermophysics and Heat Transfer.
- Lathrop, K. 1969, "Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity vs Accuracy," Journal of Computational Physics, Vol. 4, pp. 475-498.
- Sánchez, A., Krajewski, W. y Smith, T. 1992, "A General Purpose Radiative Transfer Model for Application to Remote Sensing in Multi-Dimensional Systems," IIHR Report No. 355, Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, U.S.A.,
- Sánchez, A., Smith, T. y Krajewski, W. 1994, "Three-Dimensional Atmospheric Radiation Model Based on the Discrete-Ordinates Method," Journal of Atmospheric Research, Vol. 33, pp. 283-308.
- Sánchez, A. 1997, DOMCIL.FOR: Algoritmo de Ordenadas Discretas en geometría cilíndrica, Comunicación Privada. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.
- Sánchez, A., Guillén, P. y Torres, C. 1998, The discrete ordinates method in cylindrical coordinates: A new solution procedure based on the existence of sets of independent directions. IV Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIMENICS '98), Memorias del Congreso, TM 95-102, Ciudad Guayana.